Einführung in die Logik – 08:

Intensionale Logiksysteme und intensionale Semantik

Modalitäten, temporale Aussagen,
kontrafaktische Konditionale
und epistemische Zustände

Intensionale Semantik: Motivation

- Modelle, die nur die reale Welt bzw. einen (z.B. zeitlichen) Ausschnitt der realen Welt repräsentieren, reichen i.d.R. nicht aus, um Bedeutungen hinreichend fein zu unterscheiden.
  - Bsp.: In der derzeitigen (Jan 2015) Welt der Politik in Deutschland haben
    - *der Ministerpräsident von Hessen*
    - *der Präsident des deutschen Bundesrates*

    denselben semantischen Wert, nämlich
    - V(der Ministerpräsident von Hessen) = volker_bouffier
    - V(der Präsident des deutschen Bundesrates) = volker_bouffier

- Eine Erweiterung des Modells der realen Welt, z.B. von der aktuellen Welt auf die gesamte Weltgeschichte, ist keine prinzipielle Lösung, denn auch dann lassen sich viele semantische Werte nicht unterscheiden:
    - *die Zahl der (anerkannten) Planeten unseres Sonnensystems* -
      die natürliche Zahl zwischen 8 und 10
    - *der Abendstern*
      der Morgenstern

Intensionale Semantik: Motivation

- Der semantische Wert vieler Ausdrücke ist nur durch Betrachtung von Alternativen zur realen Welt zu ermitteln:
    - Maria kann die Klausur bestehen.
    - Maria wird die Klausur bestehen.
    - Hätte Maria mehr geübt, könnte sie die Klausur bestehen.
    - Morgens war es ziemlich neblig.
    - Maria meint, dass heute Dienstag ist.
    - der Fußballbundestrainer
    - der Fußballweltmeister
    - ...

► Mögliche-Welten-Semantik

Mögliche Welten

Eine **mögliche Welt**

- ist ein formales Konstrukt der mathematisch-logischen Modelltheorie
- ist die Summe aller Fakten und Bedingungen, von denen der Wahrheitswert eines beliebigen Satzes abhängen kann
- legt fest
    - Zeit und Ort der Äußerung
    - Sprecher und Adressaten
    - Individuenbereich
    - alle relevanten Fakten, die in einer Situation gelten

    - repräsentiert (partiell)
        - ➢ die realen Umstände oder
        - ➢ denkbare Alternativen zur realen Welt

➢ Variante: mögliche Situation (sog. Situationssemantik)

Extension und Intension

- Die **Extension** eines sprachlichen Ausdrucks ist sein semantischer Wert in einer gegebenen möglichen Welt oder Situation
  - Individuenterm : Objekt
Typ e
  - Prädikat : Funktion von Objekten in Wahrheitswerte (bzw. Menge von Objekten)
Typ <e,t>
  - n-st. Relation : Funktion von n-st. Folgen von Objekten in Wahrheitswerte (bzw. Menge von n-st. Folgen von Objekten)
Typ <e, <e, t>>, <e, <e, <e, t>>> usw.
  - Aussage : Wahrheitswert
Typ t
- Die **Intension** eines sprachlichen Ausdrucks ist eine Funktion, die dem Ausdruck seine Extension in jeder möglichen Welt zuordnet.
  - ➢ Die Intension eines sprachlichen Ausdrucks zu kennen heißt zu wissen, wie in einer beliebigen möglichen Welt / Situation sein Extension zu bestimmen ist.
    - ➢ vgl. Gottlob Frege, Über Sinn und Bedeutung, 1892
    - ➢ vgl. Rudolf Carnap, Meaning and Necessity, 1947

Extension und Intension: Das Beispiel von Funktionalbegriffen

INTENSION(*der Fußballweltmeister*):

w1930	⇒	Uruguay	w1974	⇒	Deutschland
w1934	⇒	Italien	w1978	⇒	Argentinien
w1938	⇒	Italien	w1982	⇒	Italien
w1950	⇒	Uruguay	w1986	⇒	Argentinien
w1954	⇒	Deutschland	w1990	⇒	Deutschland
w1958	⇒	Brasilien	w1994	⇒	Brasilien
w1962	⇒	Brasilien	w1998	⇒	Frankreich
w1966	⇒	England	w2002	⇒	Brasilien
w1970	⇒	Brasilien	w2006	⇒	Italien
			w2010	⇒	Spanien
			w2014	⇒	Deutschland
			w2018	⇒	????

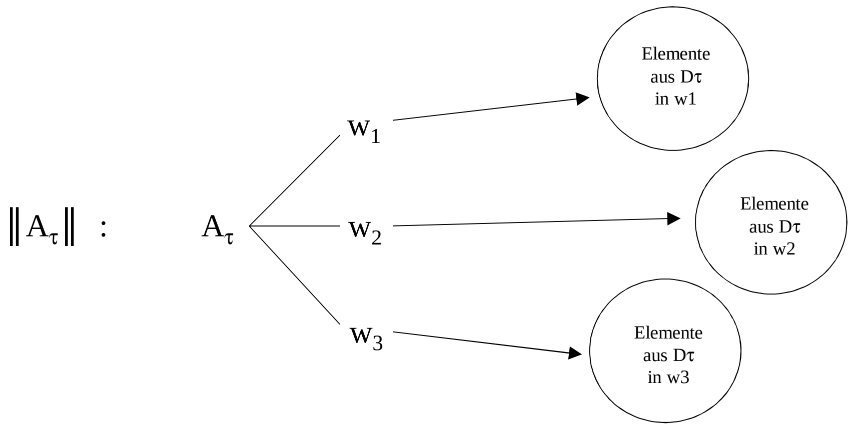
Extension und Intension: Das Beispiel von Funktionalbegriffen

INTENSION(*der Fußballweltmeister*):

w1930	⇒	Uruguay	w1974	⇒	Deutschland
w1934	⇒	Italien	w1978	⇒	Argentinien
w1938	⇒	Italien	w1982	⇒	Italien
w1950	⇒	Uruguay	w1986	⇒	Argentinien
w1954	⇒	Deutschland	w1990	⇒	Deutschland
w1958	⇒	Brasilien	w1994	⇒	Brasilien
w1962	⇒	Brasilien	w1998	⇒	Frankreich
w1966	⇒	England	w2002	⇒	Brasilien
w1970	⇒	Brasilien	w2006	⇒	Italien
			w2010	⇒	Spanien
			w2014	⇒	Deutschland
			w2018	⇒	????

semantisches Wissen:
Welche Bedingungen muss ein Objekt erfüllen, damit es in w2018 die Extension des Terms bildet?

Extension und Intension: das generelle Schema



Intensionale Semantik

Die Intension $\|A\|$ eines Ausdrucks A vom Typ τ ist eine Funktion, die jeder Welt w aus der Menge der möglichen Welten W eine Entität des entsprechenden Typs aus D_τ als semantischen Wert von A in w zuweist. Dieser semantische Wert $\|A\|^w$ ist die Extension von A in der Welt w.

Aussagen φ : $\|\varphi\|$ ist eine Funktion, die jeder möglichen Welt w aus W den Wahrheitswert von φ in w zuweist.

► **Proposition** (als char. Funktion: Menge von Welten)

Individuenterm α: $\|\alpha\|$ ist eine Funktion, die jeder möglichen Welt w aus W ein Objekt aus D als Referenten von α in w zuweist.

► **Individuenkonzept**

Prädikat P: $\|P\|$ ist eine Funktion, die jeder möglichen Welt w aus W eine charakteristische Funktion von Objekten aus D in Wahrheitswerte (bzw. eine Menge von Objekten aus D) als Extension von P in w zuweist.

► **Eigenschaft**

n-st. Relation R: $\|R\|$ ist eine Funktion, die jeder möglichen Welt w aus W eine charakteristische Funktion von n-st. Folgen von Objekten aus D in Wahrheitswerte (bzw. ein Menge von n-stelligen Folgen von Objekten aus D) als Extension von R in w zuweist.

► **Relationskonzept**

Logische Eigenschaften von und Relationen zwischen Aussagen

- Eine Aussage A ist allgemeingültig (logisch wahr) gdw. A in jeder möglichen Welt wahr ist.
- Eine Aussage A ist widersprüchlich (kontradiktorisch, logisch falsch) gdw. A in jeder möglichen Welt falsch ist.
- Eine Aussage A2 folgt aus einer Aussage A1 (A1 impliziert A2 logisch) gdw. in keiner möglichen Welt gilt, dass A1 wahr und A2 falsch ist.
- Zwei Ausdrücke A1 und A2 sind logisch äquivalent gdw. sie identische Intensionen haben, d.h. dieselben Extensionen in allen möglichen Welten aufweisen.

Reichweite der Mögliche-Welten-Semantik

- Als formale Semantiktheorie liefert die Mögliche-Welten-Semantik Definitionen zentraler semantischer Begriffe:
  - die Bedeutung eines (lexikalischen oder komplexen) Ausdrucks: seine Intension
  - der Interpretationskontext für eine Äußerung: eine Mögliche Welt
  - der potentielle Referent eines Ausdrucks: seine Extension in einer gegebenen Möglichen Welt
  - die Wahrheitsbedingungen eines Satzes: eine Beschreibung seiner Intension

- Als Beschreibungsrahmen für die Semantikkonstruktion liefert die Mögliche-Welten-Semantik in Verbindung mit einem geeigneten Formalismus (wie dem typisierten λ-Kalkül):
  - Bedeutungsrepräsentationen in einer logischen Sprache
  - Regeln der semantischen Komposition
  - Beschreibungen logischer Eigenschaften und Relationen wie Allgemeingültigkeit und Folgerung

s. Löbner (2002), Kap. 10.5

Grenzen der Mögliche-Welten-Semantik

- Bedeutungsgleichheit = Synonymie *ist definiert als*
  Identität der Intensionen = logische Äquivalenz; *daraus folgt:*

  – Logisch wahre Sätze erhalten dieselbe Bedeutung zugewiesen
    - *Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, dann ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist.*
    - *Alle Hähne sind Hähne.*
    - *2 plus 2 ist 4.*

  – Weitere Aussagen, speziell mit indexikalischen Elementen, sind semantisch nicht unterscheidbar.
    - *Heute ist Sonntag.*
    - *Morgen ist Montag.*

s. Löbner (2002), Kap. 10.5

Grenzen der Mögliche-Welten-Semantik

- Bedeutungsgleichheit = Synonymie ist definiert als Identität der Intensionen = logische Äquivalenz; daraus folgt:
  - Logisch wahre Sätze erhalten dieselbe Bedeutung zugewiesen
    - *Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, dann ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist.*
    - *Alle Hähne sind Hähne.*
    - *2 plus 2 ist 4.*
  - Weitere Aussagen, speziell mit indexikalischen Elementen, sind semantisch nicht unterscheidbar.
    - *Heute ist Sonntag.*
    - *Morgen ist Montag.*

Die generalisierte Beschreibung von Wahrheitsbedingungen mittels Möglicher Welten (oder vergleichbarer Konstrukte) ist zwar keine hinreichende, aber doch eine wesentliche Komponente der inhaltlich adäquaten und formal präzisen Explikation des Bedeutungsbegriffs.

s. Löbner (2002), Kap. 10.5

explizite Referenz auf Mögliche Welten: *Intensionale Kontexte*

Alethische Modalitäten (auch: ontische Modalitäten)
- Es ist möglich/notwendig..., dass ...
- möglicherweise/notwendigerweise ...
- x kann/muss/... /könnte/müsste/...

Deontische Modalitäten
- Es ist erlaubt/verboten/geboten/..., dass ...
- x darf (nicht)/muss/soll/kann /...

Irreale Konditionalsätze (Kontrafaktische Konditionale)
- Hätte der Schiedsrichter nicht kurz vor Schluss diesen blöden Elfmeter gepfiffen, hätten die Bayern gewonnen.

Epistemische & doxastische Modalitäten
- x glaubt/weiss/bezweifelt/hält für möglich/..., dass ...
- vielleicht, vermutlich, ...

zur Benennung der intensionalen Logiksysteme

Alethische/Ontische Modallogik

- gr. aletheia - Wahrheit
- gr. ontos - wirklich, in Wahrheit

Deontische Modalitäten

- gr. deon - Pflicht

Epistemische & doxastische Modalitäten

- gr. episteme - Wissen
- gr. doxa - Glaube, Wissen

Intensionale Logiksysteme

- Explikation intensionaler Konzepte durch
  - Deduktionssystem
    - Axiome
    - Schlussregeln
    - Theoreme
  - denotationelle (modelltheoretische) Interpretation
    - Strukturierung der Menge der möglichen Welten

- Systeme der
  - Modallogik
  - deontischen Logik
  - Logik kontrafaktischer Konditionale
  - epistemisch-doxastischen Logik
  - ...

Eigenschaften intensionaler Kontexte

- "Substitutio salva veritate"
  - in extensionalen Kontexten:
    - *9 ist größer als* 7.
    - *9 = die Anzahl der Planeten*
    - ⇒ *Die Anzahl der Planeten ist größer als 7.*
  - in nicht-extensionalen Kontexten:
    - *Es ist (mathematisch) notwendig, dass 9 größer ist als 7.*
    - *9 = die Anzahl der Planeten*
    - ×⇒× *Es ist (mathematisch) notwendig , dass die Anzahl der Planeten größer ist als 7.*
    - *Peter weiß, dass 2 + 2 = 4.*
    - *4 = √16*
    - ×⇒× *Peter weiß, dass 2 + 2 = √16.*
    - *Peter weiß, dass der diesjährige Träger des Nobelpreises für Literatur den Nobelpreis vom schwedischen König in Stockholm überreicht bekommt.*
    - *Der diesjährige Träger des Nobelpreises für Literatur ist Mo Yan.*
    - ×⇒× *Peter weiß, dass Mo Yan den Nobelpreis vom schwedischen König in Stockholm überreicht bekommt.*

Eigenschaften intensionaler Kontexte

- referentiell transparente Kontexte vs. referentiell opake Kontexte
  - In referentiell transparenten Kontexten ist die wechselseitige Ersetzung extensionsgleicher Ausdrücke ohne Veränderung des Wahrheitswerts ("substitutio salva veriate") uneingeschränkt möglich.
    - ➢ Extensionale Kontexte sind referentiell transparent, intensionale Kontexte sind referentiell opak.
- Modalität de dicto vs. de re
  - *Deutschland braucht eine handlungsfähige Regierung.*
    - NOTWENDIG ∃x (HFR(x) ∧ HAT(d, x))
    - ∃x (HFR(x) ∧ NOTWENDIG HAT(d, x))
- referentielle vs. attributive Verwendung von Termen
  - *Der Bundeskanzler wird auf Vorschlag des Bundespräsidenten vom Bundestage ohne Aussprache gewählt.* [GG Art. 63]
    - ➢ implizit intensionaler Kontext: "Es ist gesetzlich geregelt, dass ..."

Modallogik (alethische/ontische Modallogik)

Lexikon der Modallogik (ML)

- Lexikon von AL bzw. PL-1 *plus*
- einstelliger Aussagenoperator N (alternativ: □)
  - ➢ sog. Modaloperator; Typ: <t, t>

Syntax der Modallogik

- Alle wfAs von AL bzw. PL-1 sind wfAs von ML
- wenn α ein wfA von ML ist, dann auch Nα

Definition

- MA =df ¬N¬A alt.: ◊ A =df ¬ □ ¬A

Intendierte Bedeutungen der Modalloperatoren

- Np "Es ist notwendig, dass p"; "p muss der Fall sein"
- Mp "Es ist möglich, dass p"; "p kann der Fall sein"

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Modallogik (alethische/ontische Modallogik)

Intendierte Bedeutungen der Modalloperatoren in Begriffen Möglicher Welten

- Np In allen möglichen Welten ist es der Fall, dass p.
- Mp Es gibt mindestens eine mögliche Welt, in der es der Fall ist, dass p.

  - ➢ Np ↔ ¬M¬p vgl. ∀x F(x) ↔ ¬∃x ¬F(x)
  - ➢ Mp ↔ ¬N¬p vgl. ∃x F(x) ↔ ¬∀x ¬F(x)

Definitionen weiterer Modaloperatoren

- UA =df N¬A Abzw. ¬MA "es ist unmöglich, dass A "
- KA =df ¬NA bzw. M¬A "es ist kontingent/zufällig, dass A"
  alt:
- K*A =df ¬NA ∧ ¬UA "es ist kontingent/zufällig, dass A"

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Modelltheoretische Semantik der Modallogik

- Ein Modell für die Sprache der Modallogik ist eine Folge <W, R, D, V>, wobei
  - W eine nichtleere Menge von Objekten, den sog. möglichen Welten, ist;
  - R eine zweistellige Relation über den Elementen von W ist;
  - D eine nichtleere Menge von Objekten, d.h. der Individuenbereich oder die Domäne, ist;
  - V eine Wertzuweisungsfuktion mit den folgenden Eigenschaften ist:
    - Für jede Aussagenvariable p_j und für jede Welt $w_i \in W$ ist entweder $V(p_j, w_i) = 1$ oder $V(p_j, w_i) = 0$;
    - ... [entsprechend für klassische Konnektoren, Quantoren, Prädikate] ...
    - Für jeden wfA A und für jede Welt $w_i \in W$ ist $V(NA, w_i) = 1$ gdw. für jede Welt $w_j \in W$ derart, dass w_iRw_j, $V(A, w_j) = 1$; ansonsten ist $V(NA, w_i) = 0$.
    - Für jeden wfA A und für jede Welt $w_i \in W$ ist $V(MA, w_i) = 1$ gdw. für mindestens eine Welt $w_j \in W$ derart, dass w_iRw_j, $V(A, w_j) = 1$; ansonsten ist $V(NA, w_i) = 0$.

Semantikkonstruktion mit Ausdrücken des typisierten λ-Kalküls inkl. Modaloperatoren

$[_S\ [_{NP}$ Maria]	$[_{VP}\ [_V$ muss]	$[_{V\text{-}inf}$ arbeiten]]]
<<e,t>,t>	<<e,t>,<e,t>>	<e,t>
$\lambda Q\,(Q(m))$	$\lambda P\, \lambda z\, (\mathbf{N}(P(z)))$	$\lambda x\, A(x)$

$$\Downarrow_{fa}$$
$$\lambda z\, (\mathbf{N}(\lambda x\, A(x)(z)))$$
$$\Downarrow_{fa}$$
$$\lambda z\, (\mathbf{N}(A(z)))$$
$$\Downarrow_{fa}$$
$$\lambda Q\, (Q(m))\ \lambda z\, (\mathbf{N}(A(z)))$$
$$\Downarrow_{fa}$$
$$\lambda z\, (\mathbf{N}(A(z)))\ (m)$$
$$\Downarrow_{fa}$$
$$\mathbf{N}(A(m))$$

weitere intensionale Logiksysteme

- deontische Logik
- epistemisch-doxastische Logik
- Logik kontrafaktischer Konditionale
- verallgemeinerte Modalsemantik
- **Temporallogik**

Temporallogik: Temporale Aussagenlogik (TAL)

Lexikon
- Lexikon der AL +
  - einstellige Operatoren P und F

Syntaktische Formationsregeln
- Syntax der AL +
  - Wenn A ein wfA ist, dann auch PA und FA

Definitionen
- HA $=_{df}$ ¬P¬A
- GA $=_{df}$ ¬F¬A

Intendierte Bedeutungen
- Pq : Es war der Fall, dass q
- Fq : Es wird der Fall sein, dass q
- Hq: Es war immer der Fall, dass q
- Gq: Es wird immer der Fall sein dass q

Semantik der Temporalen Aussagenlogik (TAL)

Ein Modell M für die Sprache der TAL ist ein Tripel M = <T, <, V>, wobei

- T : Menge von Zeiten
- < : 2-stellige Relation über T (zeitliche Vorgängerrelation, zeitliche Präzedenz)
  - » Def.: $t' > t =_{df} t < t'$
- V : Wertzuweisungsfunktion

Wertzuweisungsfunktion V für TAL:

- Funktion, die Aussagen p auf Teilmengen V(p) von T abbildet: $V(p) \subseteq T$
  - ➢ intuitiv: die Menge der Zeiten, zu denen p wahr ist bzw. die durch p ausgedrückte Situation der Fall ist

❖ Durch unterschiedliche Festlegungen bzgl. T und < können unterschiedliche, physikalisch, psychologisch, linguistisch, ... motivierte Zeitvorstellungen modelliert werden:

- o Zeiten als Punkte, Perioden (Intervalle) oder Ereignisse
- o diskrete, dichte, kontinuierliche Zeit
- o lineare, verzweigende, zyklische Zeit
- o ...

Semantik der Temporalen Aussagenlogik (TAL)

Der **semantische Wert** (die **Interpretation**) eines Ausdrucks A in einem Modell M für die Sprache der Temporalen Aussagenlogik, $\|\mathbf{A}\|^{\mathbf{M,t}}$, ist definiert durch:

- $\|p\|^{M,t} = 1$ gdw. $t \in V(p)$
- $\|\neg A\|^{M,t} = 1$ gdw. $\|A\|^{M,t} = 0$
- $\|A \wedge B\|^{M,t} = 1$ gdw. $\|A\|^{M,t} = 1$ und $\|B\|^{M,t} = 1$
  - ... entsprechend für alle AL-Konnektive
- $\|PA\|^{M,t} = 1$ gdw. es mind. ein t' < t gibt, so dass $\|A\|^{M,t'} = 1$
- $\|FA\|^{M,t} = 1$ gdw. es mind. ein t' > t gibt, so dass $\|A\|^{M,t'} = 1$
- $\|HA\|^{M,t} = 1$ gdw. für alle t' < t gilt: $\|A\|^{M,t'} = 1$
- $\|GA\|^{M,t} = 1$ gdw. für alle t' > t gilt: $\|A\|^{M,t'} = 1$

Semantik der Temporalen Aussagenlogik (TAL)

Entsprechend den Interpretationsregeln für die Temporaloperatoren können Aussagen der TAL in Aussagen der Prädikatenlogik mit expliziter Quantifikation über Zeiten übersetzt werden

- "p[t]" steht für "p gilt zur Zeit t„
- t_0 ist eine Konstante für die Auswertungszeit, z.B. 'jetzt'

Pp	$\exists t\ (t < t_0 \wedge p[t])$
Fp	$\exists t\ (t_0 < t \wedge p[t])$
Hp	$\forall t\ (t < t_0 \rightarrow p[t])$
Hp	$\forall t\ (t_0 < t \rightarrow p[t])$

Übersetzung natürlichsprachlicher Tempora in die Sprache der TAL

[Präsens]		
Peter ist in der Vorlesung.	q	$q[t_0])$
[Präteritum]		
Peter war in der Vorlesung.	Pq	$\exists t\ (t < t_0 \wedge q[t])$
[Futur]		
Peter wird in der Vorlesung sein.	Fq	$\exists t\ (t_0 < t \wedge q[t])$
[Präsens-Perfekt]		
Peter ist in der Vorlesung gewesen.	Pq	$\exists t\ (t < t_0 \wedge q[t])$
[Präteritum-Perfekt]		
Peter war in der Vorlesung gewesen.	PPq	$\exists t\ \exists t'\ (t < t_0 \wedge t' < t \wedge q[t'])$
[Futur-Perfekt]		
Peter wird in der Vorlesung gewesen sein.	FPq	$\exists t\ \exists t'\ (t_0 < t \wedge t' < t \wedge q[t'])$

Hinweis: Diese einfachen Übersetzungen und die damit verbundenen Wahrheitsbedingungen für temporale Aussagen sind nur erste Annäherungen. Eine adäquate semantische Repräsentation der natürlichsprachlichen Tempora benötigt beträchtliche Erweiterungen der klassischen Temporallogik. S. hierzu das Script *Zeitaspekte* (http://www.cl.uni-heidelberg.de/kurs/ws06/raumzeit/Skript.pdf).

Wahrheitsbedingungen für temporallogische Tempus-Repräsentationen

Präteritum und Präsens-Perfekt

Peter war in der Vorlesung bzw. *Peter ist in der Vorlesung gewesen* (= Pq) ist wahr in einem Modell M zur Zeit t (d.h. $\|Pq\|^{M,t} = 1$) gdw. es mindestens ein t' < t gibt, so dass *Peter ist in der Vorlesung* in M zur Zeit t' wahr ist (d.h. $\|q\|^{M,t'} = 1$).

Futur

Peter wird in der Vorlesung sein (= Fq) ist wahr in einem Modell M zur Zeit t (d.h. $\|Fq\|^{M,t} = 1$) gdw. es mind. ein t' > t gibt, so dass *Peter ist in der Vorlesung* in M zur Zeit t' wahr ist (d.h. $\|q\|^{M,t'} = 1$).

Präteritum-Perfekt

Peter war in der Vorlesung gewesen (= PPq) ist wahr in einem Modell M zur Zeit t (d.h. $\|PPq\|^{M,t} = 1$) gdw. es mindestens ein t' < t und ein t'' < t' gibt, so dass *Peter ist in der Vorlesung* in M zur Zeit t'' wahr ist (d.h. $\|q\|^{M,t''} = 1$).

Futur-Perfekt

Peter wird in der Vorlesung gewesen sein (= FPq) ist wahr in einem Modell M zur Zeit t (d.h. $\|FPq\|^{M,t} = 1$) gdw. es mindestens ein t' > t und ein t'' < t' gibt, so dass *Peter ist in der Vorlesung* in M zur Zeit t'' wahr ist (d.h. $\|q\|^{M,t''} = 1$).

Semantikkonstruktion mit Ausdrücken des typisierten λ-Kalküls
inkl. Temporaloperatoren (& Type Raising bei NP)

$[_S\ [_{NP}$ Maria]	$[_{VP}\ [_{V\text{-}inf}$ arbeit-]	$[_{V\text{-}past\text{-}morph}$ –ete]]]
<<e,t>,t>	<e,t>	<<e,t>,<e,t>>
$\lambda Q\ (Q(m))$	$\lambda x\ A(x)$	$\lambda F\ \lambda z\ (\mathbf{P}(F(z)))$

$\lambda F\ \lambda z\ (\mathbf{P}(F(z)))\ (\lambda x\ A(x)\ )$

$\Downarrow_{fa}$

$\lambda z\ (\mathbf{P}(\lambda x\ A(x)(z)))$

$\Downarrow_{fa}$

$\lambda z\ (\mathbf{P}(A(z)))$

$\Downarrow_{fa}$

$\lambda Q\ (Q(m))\ (\lambda z\ (\mathbf{P}(A(z))))$

$\Downarrow_{fa}$

$\lambda z\ (\mathbf{P}(A(z)))\ (m)$

$\Downarrow_{fa}$

$\mathbf{P}(A(m))$

Unzulänglichkeiten von TAL als Repräsentationsformalismus für NL-Zeitausdrücke

Probleme der Explikation der Tempora durch temporallogische Formeln:

1. kein eigener Präsens-Operator
2. Iterierbarkeit der Operatoren
3. keine Unterscheidung zwischen Präteritum und Präsens-Perfekt
4. indefinite vs. definite Zeitreferenz
5. inadäquate Analyse des Zusammenspiels von Tempora und Temporaladverbialen
6. inadäquat für PFV-Aspekt

Problem 4: indefinite vs. definite Zeitreferenz [Partee 1973]

I didn't turn off the stove - q : 'I turn off the stove'

(1) a. $\neg Pq$

$\neg \exists t(t < t_0 \wedge q[t])$

(2) a. $P\neg q$

$\exists t(t < t_0 \wedge \neg q[t])$

⇨ korrekt: *<u>Innerhalb der Periode, von der ich spreche,</u> habe ich den Herd nicht abgestellt*

Unzulänglichkeiten von TAL als Repräsentationsformalismus für NL-Zeitausdrücke

Problem 5: Tempus und Temporaladverbiale

Peter left yesterday.

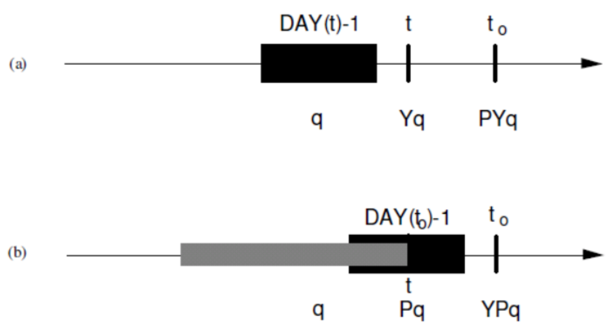
(a) PYp

(b) YPp

wobei

$[\![Yp]\!]_t = 1$ gdw. $[\![p]\!]_{t'} = 1$ für eine Zeit $t' \subseteq [DAY(t)\text{-}1]$

$[\![Pp]\!]_t = 1$ gdw. $[\![p]\!]_{t'} = 1$ für ein t' derart, dass $t' < t$.



(a) PYq - $\exists t \exists t'(t<t_0 \wedge t' \subseteq [DAY(t)\text{-}1] \wedge q[t'])$

(b) YPq - $\exists t \exists t'(t'<t \wedge t \subseteq [DAY(t_0)\text{-}1] \wedge q[t'])$

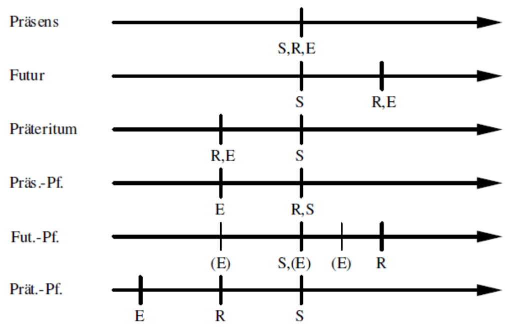
⇨ **mögliche Lösung für Probleme (2), (3), (4), (5):**

Reichenbachs Theorie der temporalen Relationen [Reichenbach (1947)]

S - Sprechzeit
E - Ereigniszeit
R - Referenzzeit

[Präs.]	R = S	∧ E = R	∧ E = S	(S,R,E)
[Fut.]	S < R	∧ E = R	∧ S < E	(S-R,E)
[Prät.]	R < S	∧ E = R	∧ E < S	(R,E-S)
[Präs.-Pf.]	S = R	∧ E < R	∧ E < S	(E-R,S)
[Fut.-Pf.]	S < R	∧ E < R		(S-R & E-R)
[Prät.-Pf.]	R < S	∧ E < R		(E-R-S)

- Adverbiale wie *gestern/yesterday* legen die Referenzzeit R für die Zeit E der eingebetteten Proposition fest



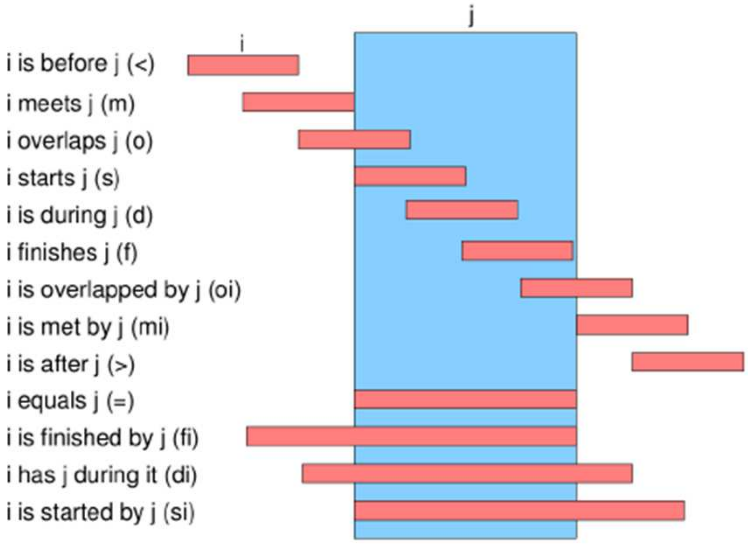
Temporallogik und zeitliches Schließen in KI und CL

Literatur: ein Überblicksartikel zu zeitlichem (und räumlichem) Schließen in KI und CL:

Habel, Christopher; Herweg, Michael; Pribbenow, Simone & Schlieder, Christoph (2000): Wissen über Raum und Zeit. In: Görz, G.; Rollinger, C.-R. & Schneeberger, J. (eds.): *Handbuch der Künstlichen Intelligenz.* Oldenbourg Verlag: München. 349-405 (3., vollständig überarbeitete Auflage).

aus: Heckmann SS 2013

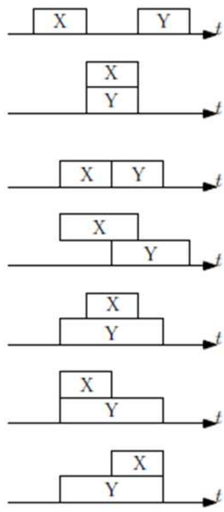
Temporallogik in KI und CL: James Allens Interval Calculus



Ich verwende für die Darstellung von Allens Interval Calculus Folien meiner Studenten Dustin Heckmann und Dominik Sterk aus ihren Referaten im SS 2013 bzw. 2015.

aus: Sterk SS 2015

Temporallogik in KI und CL: James Allens Interval Calculus

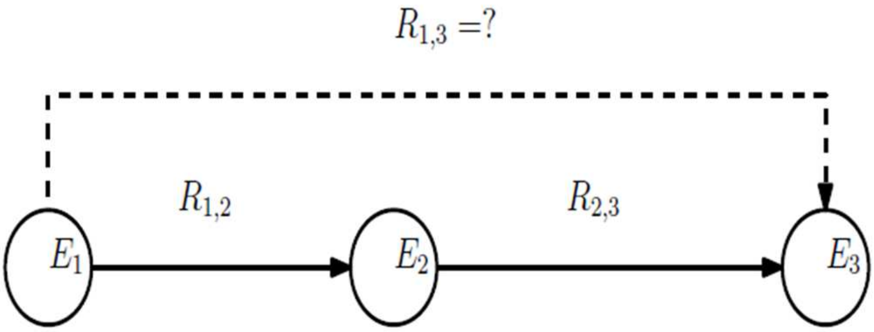


Relation	Symbol	Inverses Symbol
X before Y	$<$	$>$
X equal Y	$=$	$=$
X meets Y	m	mi
X overlaps Y	o	oi
X during Y	d	di
X starts Y	s	si
X finishes Y	f	fi

aus: Sterk SS 2015

Temporallogik in KI und CL: James Allens Interval Calculus

Die Relationen und Ereignisse können als Netzwerk dargestellt werden.



Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

aus: Sterk SS 2015

James Allens Interval Calculus: Transitivitätstabelle (Lookup Table)

B r2 C / A r1 B	<	>	d	di	o	oi	m	mi	s	si	f	fi
"before" <	<	no info	< o m d s	<	<	< o m d s	<	< o m d s	<	<	< o m d s	<
"after" >	no info	>	> oi mi d f	>	> oi mi d f	>	> oi mi d f	>	> oi mi d f	>	>	>
"during" d	<	>	d	no info	< o m d s	> oi mi d f	<	>	d	> oi mi d f	d	< o m d s
"contains" di	< o m di fi	> oi di mi si	o oi dur con =	di	o di fi	oi di si	o di fi	oi di si	di fi o	di	di si oi	di
"overlaps" o	<	> oi di mi si	o d s	< o m di fi	< o m	o oi dur con =	<	oi di si	o	di fi o	d s o	< o m
"over-lapped-by" oi	< o m di fi	>	oi d f	> oi mi di si	o oi dur con =	> oi mi	o di fi	>	oi d f	oi > mi	oi	oi di si
"meets" m	<	> oi mi di si	o d s	<	<	o d s	<	f fi =	m	m	d s o	<
"met-by" mi	< o m di fi	>	oi d f	>	oi d f	>	s si =	>	d f oi	>	mi	mi
"starts" s	<	>	d	< o m di fi	< o m	oi d f	<	mi	s	s si =	d	< m o
"started by" si	< o m di fi	>	oi d f	di	o di fi	oi	o di fi	mi	s si =	si	oi	di
"finishes" f	<	>	d	> oi mi di si	o d s	> oi mi	m	>	d	> oi mi	f	f fi =
"finished-by" fi	<	> oi mi di si	o d s	di	o	oi di si	m	si oi di	o	di	f fi =	fi

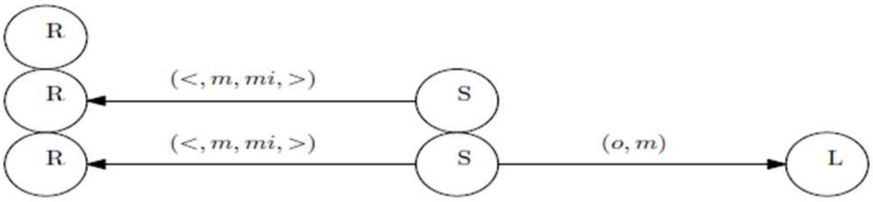
Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

aus: Sterk SS 2015

James Allens Interval Calculus: Constraint Propagation - Beispiel

"John was not in the room when I touched the switch to turn on the light."

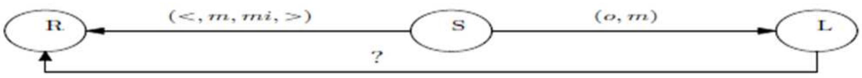
- R = John was in the room.
- S = touch the switch
- L = The time the light was on.



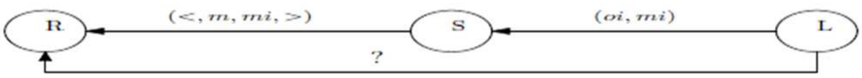
aus: Sterk SS 2015

James Allens Interval Calculus: Constraint Propagation - Beispiel

Welche Relation besteht zwischen R und L ?



Relation zwischen S und L muss umgedreht werden. Warum?

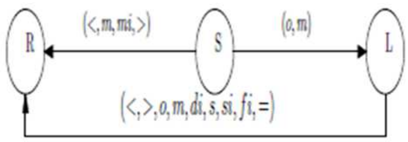


aus: Sterk SS 2015

James Allens Interval Calculus: Constraint Propagation - Beispiel

Bestimme *Constraints* zwischen L und R.

$T(oi, <) = (<, o, m, di, fi)$
$T(oi, m) = (o, di, fi)$
$T(oi, mi) = (>)$
$T(oi, >) = (>)$
$T(mi, <) = (<, o, m, di, fi)$
$T(mi, m) = (s, si, =)$
$T(mi, mi) = (>)$
$T(mi, >) = (>)$



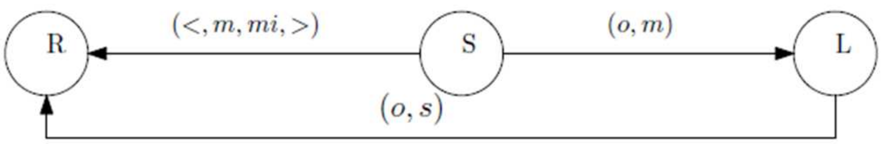
Wir erhalten die Relation $\{<, >, o, m, di, s, si, fi, =\}$

aus: Sterk SS 2015

James Allens Interval Calculus: Constraint Propagation - Beispiel

"But John was in the room later while the light went out."

$\Rightarrow$ L überschneidet(o), beginnt(s) oder ist während(d) R.
Durch Bilden der Schnittmenge zwischen der neuen und der alten Relation erält man:
$\{<, >, o, m, di, s, si, fi, =\} \cap \{o, s, d\} = \{o, s\}$



aus: Sterk SS 2015

James Allens Interval Calculus: Constraint Propagation - Beispiel

Durch hinzufügen der neuen Bedingung wird das Netzwerk aktualisiert. Hier die Relation zwischen S und R.

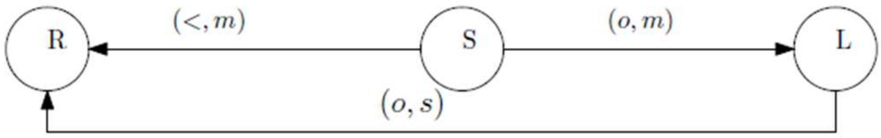
$T(o, o) = (<, o, m)$

$T(o, s) = (o)$

$T(m, o) = (<)$

$T(m, s) = (m)$

Wir erhalten die Relation $(<, o, m)$



Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

aus: Sterk SS 2015

James Allens Interval Calculus: Eigenschaften

- Allens Interval Calculus ist korrekt, aber nicht vollständig.
- Laufzeit des Algorithmus: $O(n^3)$
- Speicherbedarf des Algorithmus während der Berechnung: $O(n^2)$
- Allens Kalkül ist weniger mächtig als die klassische Temporallogik.

---

n: Anzahl der Knoten im Netzwerk

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

aus: Heckmann SS 2013

Christian Freksa (1992):
Verbesserung der Laufzeiteigenschaften des Allen-Kalküls durch Semi-Intervalle

Semi-intervals

- Temporal knowledge is often incomplete
- Complete knowledge is often unnecessary:
  - Did Newton live before Einstein?
  - → Sufficient to know that Newton's death took place before Einstein's birth
- Allen's approach:
  - The less we know, the more complex the representation
  - Coarse knowledge is treated as disjunctions of fine-grained alternatives
  - → Complex and not 'cognitively plausible'
- Instead, relations can be expressed using only beginnings and endings of intervals (semi-intervals)
- Underspecification reduces complexity and is cognitively more plausible

Christian Freksa (1992):
Verbesserung der Laufzeiteigenschaften des Allen-Kalküls durch Semi-Intervalle

Semi-Intervalle stehen für Anfänge und Enden von Intervallen:

- α(t) – der Anfang des Intervals t
- ω(t) – das Ende des Intervals t

(1) Peter war schon vor Maria zu Hause.
(2) Als Maria im Schwimmbad war, war Peter zu Hause.

Repräsentationen nach (a) ALLEN vs. (b) FREKSA

(1.a) $\text{BEFORE}(t_1, t_2) \vee \text{MEETS}(t_1, t_2) \vee \text{OVERLAPS}(t_1, t_2) \vee \text{FINISHES}_I(t_1, t_2) \vee \text{DURING}_I(t_1, t_2)$

(1.b) $\alpha(t_1) < \alpha(t_2)$

➲ die Relation zwischen $\omega(t_1)$ und $\omega(t_2)$ - und damit die Relation zwischen t_1 und t_2 als Ganzen - ist irrelevant.

(2.a) $\text{OVERLAPS}(t_1, t_2) \vee \text{OVERLAPS}_I(t_1, t_2) \vee \text{STARTS}(t_1, t_2) \vee \text{STARTS}_I(t_1, t_2) \vee \text{DURING}(t_1, t_2) \vee \text{DURING}_I(t_1, t_2) \vee \text{FINISHES}(t_1, t_2) \vee \text{FINISHES}_I(t_1, t_2) \vee \text{EQUALS}(t_1, t_2)$

(2.b) $\alpha(t_1) < \omega(t_2) \wedge \alpha(t_2) < \omega(t_1)$

➲ die Relationen zwischen $\alpha(t_1)$ und $\alpha(t_2)$ sowie zwischen $\omega(t_1)$ und $\omega(t_2)$ sind irrelevant.

aus: Heckmann SS 2013

Christian Freksa (1992):
Verbesserung der Laufzeiteigenschaften des Allen-Kalküls durch Semi-Intervalle

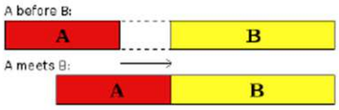
Conceptual Neighborhood I

Freksa (1992)

Two relations between pairs of events are (conceptual) neighbours, if they can be directly transformed into one another by continuously deforming (i.e., shortening, lengthening, moving) the events (in a topological sense).

"If a cognitive system is uncertain as to which relation between two events holds, uncertainty can be expected particularly between neighbouring concepts."

- Relations *before* ($<$) and *meets* (m) are conceptual neighbors

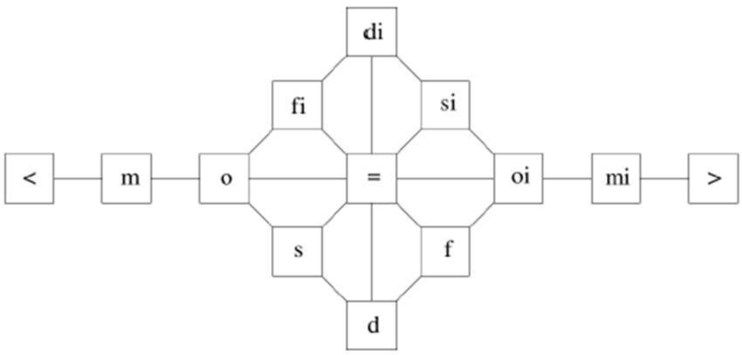


Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

aus: Heckmann SS 2013

Christian Freksa (1992):
Verbesserung der Laufzeiteigenschaften des Allen-Kalküls durch Semi-Intervalle

Conceptual Neighborhood II

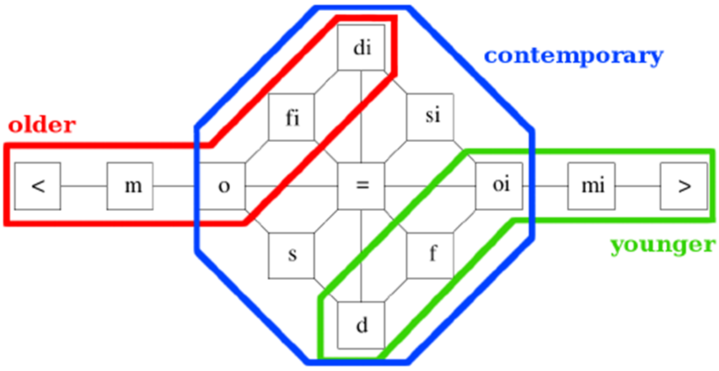


Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

aus: Heckmann SS 2013

Christian Freksa (1992):
Verbesserung der Laufzeiteigenschaften des Allen-Kalküls durch Semi-Intervalle

Conceptual Neighborhood II



Further relations: survives, head to head, precedes, succeeds, . . .

Das generelle Konstruktionsprinzip intensionaler Logiksysteme

- Basis: Lexikon, Syntax und Semantik der extensionalen AL/PL
- Erweiterung von Lexikon und Syntax extensionaler Systeme:
  - Intensionale Operatoren
  - Schlussregeln/Axiome für intensionale Operatoren
- Erweiterung der modelltheoretischen Semantik:
  - extensionale Modelle $M_{ext} = \langle D, V \rangle$ werden erweitert zu
  - intensionalen Modellen $M_{int} = \langle D, \Omega, P, V \rangle$, wobei
    - D : Domäne
    - Ω : Menge von Objekten ≠ D
      - je nach Logiksystem:
        - » W : Menge möglicher Welten
        - » T : Menge von Zeiten (Zeitpunkte, Perioden)
        - » E : Menge von Ereignissen
        - » Δ : Menge von doxastischen oder epistemischen Zuständen
        - » ...
    - P : Relation über Objekten aus Ω
      - je nach Logiksystem: Erreichbarkeit, Präzedenz. Teil-von, epistemische Zugänglichkeit, ...
    - V : Wertzuweisungsfunktion / Interpretationsfunktion

Backup:
mehr zu intensionalen Logiksystemen

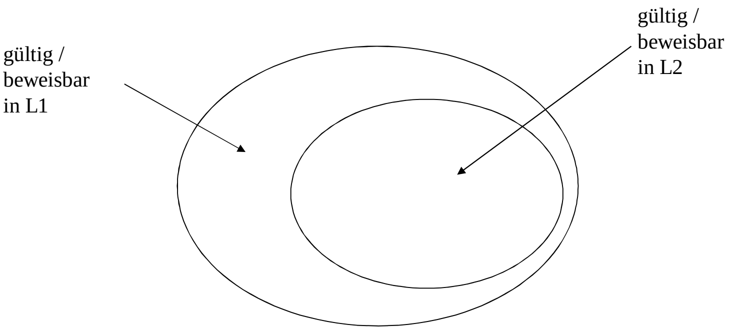
- Modallogische Kalküle
- Ausdrucksstärke modaler Kalküle
- Modelltheoretische Semantik der Modallogik
- Deontische Logik und Imperative
- Epistemisch-doxastische Logik
- Logik kontrafaktischer Konditionale
- verallgemeinerte Modalsemantik

Kalküle der Modallogik

- Unterschiedliche Intuitionen bzgl. der intensionalen Konzepte werden durch verschieden starke modallogische Kalküle erfasst.
- Die Kalküle unterscheiden sich
  - im Deduktionssystem durch unterschiedliche Axiome
  - in der modelltheoretischen Semantik durch unterschiedliche Strukturierungen der Menge der möglichen Welten W

Kalküle der Modallogik

- Exkurs: Ein Logiksystem L1 ist stärker als ein Logiksystem L2 gdw. in L1 Aussagen gültig sind, die in L2 nicht gültig sind.
  - $\{A \mid L2 \models A\} \subseteq \{A \mid L1 \models A\}$
    - ➢ Das schwächere System L2 ist unspezifischer bzgl. Theoremen als das stärkere System L1.



Kalküle der Modallogik

- Der modale Basiskalkül **K**
  - AL + Axiom:

    $N(p \rightarrow q) \rightarrow (Np \rightarrow Nq)$

    - ➢ Theoreme: nur einfache Konjunktions- und Diskjunktionsgesetze wie
      $Np \wedge Nq \rightarrow N(p \wedge q)$
      $Np \rightarrow N(p \vee q)$

- Der Kalkül **T**
  - K + Axiom

    $Np \rightarrow p$

    - ➢ Theoreme:
      $p \rightarrow Mp$
      $Np \rightarrow Mp$
      $NNp \rightarrow Np$

Kalküle der Modallogik

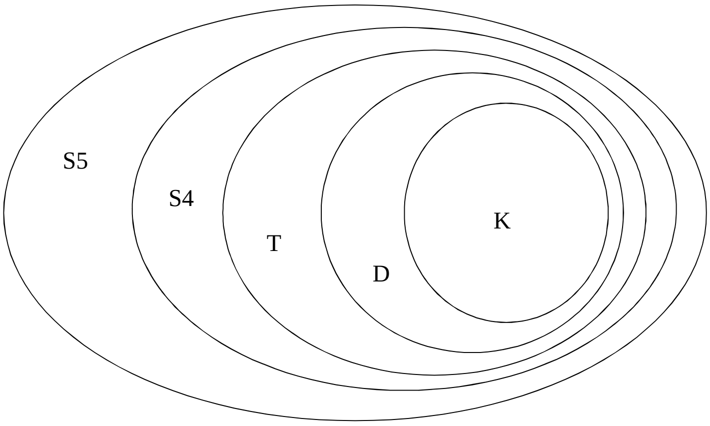
- Der Kalkül **S4**
  - T + Axiom
    $Np \rightarrow NNp$
    - ➢ Theoreme:
      $NNNp \leftrightarrow Np$
      $MMMp \leftrightarrow Mp$
- Der Kalkül **S5**
  - S4 + Axiom
    $Mp \rightarrow NMp$
    - ➢ Theoreme:
      $MNp \leftrightarrow Np$
      $NMp \leftrightarrow Mp$

Kalküle der Modallogik

- ein interessanter Kalkül zwischen K und T: der Kalkül **D** (*)
  - K + Axiom:
    $Np \rightarrow Mp$
    - ➢ reflektiert deontische Modalitäten:
      Wenn es geboten ist, dass p, dann ist es auch erlaubt, dass p.
      Wenn man etwas tun muss, dann darf (kann) man es auch tun.
    - ➢ Das T-Axiom $Np \rightarrow p$ wäre deontisch nicht sinnvoll:
      ?? *Wenn es geboten ist, dass p, dann ist es auch der Fall, dass p.*

(*) auch: SDL - Standardsystem der Deontischen Logik

Anordnung der Modalkalküle



Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Modelle für die Modallogik: Zugänglichkeit von Welten

- unterschiedliche Intuitionen bzgl. intensionaler Konzepte werden semantisch durch unterschiedliche Strukturierung der Menge W der modallogischen Modelle erfasst:
  - verschieden starke Restriktionen der Relation **R** der **Zugänglichkeit** zwischen Welten
    - Eine Welt w_2 ist einer Welt w_1 zugänglich
    - Eine Welt w_2 ist eine relativ zu w_1 mögliche Welt

$$\left.\begin{array}{l}\text{Eine Welt } w_2 \text{ ist einer Welt } w_1 \text{ zugänglich}\\ \text{Eine Welt } w_2 \text{ ist eine relativ zu } w_1 \text{ mögliche Welt}\end{array}\right\} : \quad w_1Rw_2$$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Modelle für die Modallogik: Zugänglichkeit von Welten

- unterschiedliche Intuitionen bzgl. intensionaler Konzepte werden semantisch durch unterschiedliche Strukturierung der Menge W der modallogischen Modelle erfasst:
  - verschieden starke Restriktionen der Relation R der **Zugänglichkeit** zwischen Welten
    - Eine Welt w_2 ist einer Welt w_1 zugänglich
    - Eine Welt w_2 ist eine relativ zu w_1 mögliche Welt

    $\Big\}$: w_1Rw_2

- modale und nicht-modale Modelle

	nicht-modal / extensional	**modal**
AL	V	<W, R, V>
PL	<D, V>	<W, R, D, V>

Modelltheoretische Semantik der Modallogik

- Ein Modell für die Sprache der Modallogik ist eine Folge <W, R, D, V>, wobei
  - W eine nichtleere Menge von Objekten, den sog. möglichen Welten, ist;
  - R eine zweistellige Relation über den Elementen von W ist;
  - D eine nichtleere Menge von Objekten, d.h. der Individuenbereich oder die Domäne, ist;
  - V eine Wertzuweisungsfuktion mit den folgenden Eigenschaften ist:
    - Für jede Aussagenvariable p_j und für jede Welt $w_i \in$ W ist entweder $V(p_j, w_i) = 1$ oder $V(p_j, w_i) = 0$;
    - ... [entsprechend für klassische Konnektoren, Quantoren, Prädikate] ...
    - Für jeden wfA α und für jede Welt $w_i \in$ W ist $V(N\alpha, w_i) = 1$ gdw. für jede Welt $w_j \in$ W derart, dass w_iRw_j, $V(\alpha, w_j) = 1$; ansonsten ist $V(N\alpha, w_i) = 0$.
    - Für jeden wfA α und für jede Welt $w_i \in$ W ist $V(M\alpha, w_i) = 1$ gdw. für mindestens eine Welt $w_j \in$ W derart, dass w_iRw_j, $V(\alpha, w_j) = 1$; ansonsten ist $V(N\alpha, w_i) = 0$.

Modelltheoretische Semantik der Modallogik: Restriktionen bzgl. der Zugänglichkeitsrelation R

Kalkül	Axiome	Modellbedingungen bzgl. R
K	$N(p \rightarrow q) \rightarrow$ $(Np \rightarrow Nq)$	--------
D (SDL)	K + $Np \rightarrow Mp$	seriell
T	D + $Np \rightarrow p$	+ reflexiv
S4	T + $Np \rightarrow NNp$	+ transitiv
S5	S4 + $Mp \rightarrow NMp$ oder $MNp \rightarrow p$	+ symmetrisch

Exkurs: Eigenschaften von Relationen

- Die Relation R ist seriell =df $\forall w_i \exists w_j\ w_iRw_j$
  - ➢ Die Relation R ist seriell gdw. es für jede Welt w_i mindestens eine Welt w_j gibt, die von w_i aus zugänglich ist
- Die Relation R ist reflexiv =df $\forall w\ wRw$
  - **Beispiele: "gleich", "hat denselben Geburtstag wie"**
- Die Relation R ist transitiv =df $\forall w_i \forall w_j \forall w_k (w_iRw_j \wedge w_jRw_k \rightarrow w_iRw_k)$
  - **Beispiele: "gleich", "jünger als", "Vorfahre von"**
- Die Relation R ist symmetrisch =df $\forall w_i \forall w_j (w_iRw_j \rightarrow w_jRw_i)$
  - **Beispiele: "ähnlich", gleich"**

➢ Relationen, die zugleich reflexiv, transitiv und symmetrisch sind, werden **Äquivalenzrelationen** genannt.
- **Beispiele: "hat dasselbe Alter wie", "hat dieselbe Haarfarbe wie"**

Korrespondenz zwischen modalen Theoremen und Eigenschaften der Zugänglichkeitsrelation am Beispiel des charakteristischen S5-Axioms Mp → NMp

- Beweisstrategie: Reductio ad absurdum (vgl. Quick Falsification)
- Annahme: Für eine Welt $w \in W$ eines S5-Modells sei V(w, Mp → NMp) = 0.
- Dann müsste gelten:
  - (1) V(w, Mp) = 1
  - (2) V(w, NMp) = 0
- zu (1):
  Wenn V(w, Mp) = 1, dann gäbe es eine Welt w_1 mit wRw_1 und $V(w_1, p) = 1$
- zu (2):
  Wenn V(w, NMp) = 0, dann gäbe es eine Welt w_2 mit wRw_2 und $V(w_2, Mp) = 0$.
  Wenn $V(w_2, Mp) = 0$, dann müsste für alle Welten w* mit w_2Rw^* gelten, dass V(w*, p) = 0.
  - Aus wRw_1 folgt aufgrund der Symmetrie von R: w_1Rw
  - Aus w_1Rw und wRw_2 folgt aufgrund der Transitivität von R: w_1Rw_2
  - Aus w_1Rw_2 folgt aufgrund der Symmetrie von R: w_2Rw_1
    - Wenn wegen $V(w_2, Mp) = 0$ für alle Welten w* mit w_2Rw^* gelten soll, dass V(w*, p) = 0, dann muss wegen w_2Rw_1 auch gelten: $V(w_1, p) = 0$.
- Damit ist unter den Annahmen (1) und (2) ein Widerspruch abgeleitet:
  - Aus (1) folgt $V(w_1, p) = 1$
  - Aus (2) folgt $V(w_1, p) = 0$
- Als muss für jedes S5-Modell elten: V(w, Mp → NMp) = 1, und zwar wg. **Symmetrie von R**

Ausdrucksfähigkeit modaler Kalküle

- Die Kalküle T, S4 und S5 spiegeln durch ihre Theoreme und ihre Ausdrucksfähigkeit die intuitiven Eigenschaften von Modalitäten in unterschiedlicher Weise wider:

Ausdrucksfähigkeit modaler Kalküle

- Die Kalküle T, S4 und S5 spiegeln durch ihre Theoreme und ihre Ausdrucksfähigkeit die intuitiven Eigenschaften von Modalitäten in unterschiedlicher Weise wider:

➢ $\boxed{\text{T}}$

- ➢ spiegelt wesentliche Eigenschaften alethischer Modalitäten korrekt wider:
  - ➢ Was notwendig ist, ist auch wahr. $Np \rightarrow p$
  - ➢ Was wahr ist, ist auch möglich. $p \rightarrow Mp$
  - ➢ Was notwendig ist, ist auch möglich. $Np \rightarrow Mp$
- ➢ bietet keinen Anhaltspunkt zur Behandlung iterierter Modalitäten außer:
  - ➢ $NNp \rightarrow Np$
  - ➢ $Mp \rightarrow MMp$
- ➢ In T gibt es unendlich viele voneinander unterscheidbare (d.h. nichtäquivalente und nichtreduzierbare) modale Präfixe

Ausdrucksfähigkeit modaler Kalküle

- Die Kalküle T, S4 und S5 spiegeln durch ihre Theoreme und ihre Ausdrucksfähigkeit die intuitiven Eigenschaften von Modalitäten in unterschiedlicher Weise wider:

➢ $\boxed{\text{S4}}$

- ➢ Reduktionstheoreme: Gleichartige iterierte Modaloperatoren werden auf einen reduziert, d.h. zwischen Np und NNp sowie Mp und MMp wird nicht unterschieden:
  - ➢ $Np \leftrightarrow NNp$
  - ➢ $Mp \leftrightarrow MMp$
- ➢ In S4 gibt es nur 14 voneinander unterscheidbare (d.h. nichtäquivalente und nichtreduzierbare) modale Präfixe

p	Np	Mp	
$\neg p$	$\neg Np$	$\neg Mp$	
NMp	MNp	$\neg NMp$	$\neg MNp$
$NMNp$	$MNMp$	$\neg NMNp$	$\neg MNMp$

Ausdrucksfähigkeit modaler Kalküle

- Die Kalküle T, S4 und S5 spiegeln durch ihre Theoreme und ihre Ausdrucksfähigkeit die intuitiven Eigenschaften von Modalitäten in unterschiedlicher Weise wider:

➢ $\boxed{\text{S5}}$

  ➢ Durch weitere Reduktionstheoreme sind die Ausdrucksmöglichkeiten von S5 gegenüber S4 weiter eingeschränkt. Aufgrund von

    ➢ Np ↔ MNp

    ➢ Mp ↔ NMp

  sind in S4 nur noch 6 voneinander unterscheidbare (d.h. nichtäquivalente und nichtreduzierbare) Modalitäten erfassbar:

    ➢ p - nicht-modale affirmative Aussage
    ➢ ¬p - nicht-modale negierte Aussage
    ➢ Np - Notwendigkeit
    ➢ Mp - Möglichkeit
    ➢ ¬Np - Nicht-Notwendigkeit (= Kontingenz?)
    ➢ ¬Mp - Unmöglichkeit

Ausdrucksfähigkeit modaler Kalküle

- Die Kalküle T, S4 und S5 spiegeln durch ihre Theoreme und ihre Ausdrucksfähigkeit die intuitiven Eigenschaften von Modalitäten in unterschiedlicher Weise wider:

❋ Je { schwächer / stärker } der Kalkül, desto { allgemeiner/unrestringierter / spezifischer/restriktiver }

werden die modalen Konzepte expliziert.

Semantikkonstruktion mit Ausdrücken des typisierten λ-Kalküls
inkl. Modaloperatoren

$[_S\ [_{NP}$ Peter$]$	$[_{VP}\ [_V$ muss$]$	$[_{V\text{-}inf}$ arbeiten$]\ ]\ ]$
<<e,t>,t>	<<e,t>,<e,t>>	<e,t>
$\lambda Q\ (Q(p))$	$\lambda P\ \lambda z\ (\mathbf{N}(P(z)))$	$\lambda x\ A(x)$

$$\Downarrow_{fa}$$
$$\lambda z\ (\mathbf{N}(\lambda x\ A(x)(z)))$$
$$\Downarrow_{fa}$$
$$\lambda z\ (\mathbf{N}(A(z)))$$
$$\Downarrow_{fa}$$
$$\lambda Q\ (Q(p))\ \lambda z\ (\mathbf{N}(A(z)))$$
$$\Downarrow_{fa}$$
$$\lambda z\ (\mathbf{N}(A(z)))\ (p)$$
$$\Downarrow_{fa}$$
$$\mathbf{N}(A(p))$$

weitere intensionale Logiksysteme

- deontische Logik
- epistemisch-doxastische Logik
- Logik kontrafaktischer Konditionale
- verallgemeinerte Modalsemantik

Deontische Logik

- Logik normativer/präskriptiver Begriffe und Sätze
  - *Es ist geboten, dass p.* OBL p
  - *Es ist erlaubt, dass p.* PERM p
  - *Es ist verboten, dass p.* FORB p
    - auch: *a muss / soll / darf / darf nicht (eine Handlung des Typs H ausführen).*

  - Übersetzungen:
    - *Rauchen verboten.*
      FORB ∃x R(x)
    - *Rauchen im Hörsaal 014 verboten.*
      FORB ∃x (R(x) ∧ LOC(x, k2-004))
      FORB ∃e ∃x (RAUCHEN(e) ∧ AGENS(e, x) ∧ LOC(e, k2-004))

Deontische Logik

- der deontische Standardkalkül SDL (a.: D) als Erweiterung des Modalsystems K:
  - Lexikon:
    Lexikon der AL +
    Modalloperator OBL (Typ <t, t>)

    Definitionen:

[PERM]	PERM p	=df	¬OBL¬p
[FORB]	FORB p	=df	OBL¬p bzw. ¬PERM p

  - Syntax:
    Axiome der AL +
    (1) OBL(p → q) → (OBL p → OBL q) - deontische Variante des charakt. K- Axioms
    (2) OBL p → PERM p - charakt. SDL-Axiom
    - reflektiert Charakterstikum deontischer Modalitäten:
      Wenn es geboten ist, dass p, dann ist es auch erlaubt, dass p.

Deontische Logik

- alethische und deontische Modalitäten im Vergleich

	alethisch	deontisch
K	$N(p \rightarrow q) \rightarrow (Np \rightarrow Nq)$	$OBL(p \rightarrow q) \rightarrow (OBLp \rightarrow OBLq)$
D	$Np \rightarrow Mq$	$OBLp \rightarrow PERMq$

Deontische Logik

- der deontische Standardkalkül SDL (a.: D) als Erweiterung des Modalsystems K:
  - Semantik:

$V(OBL\alpha, w) = 1$ ► die Normaussage OBL α gilt in w aufgrund eines in w etablierten normativen Hintergrunds

deontische Zugänglichkeitsrelation $w_1R^dw_2$:

► w_2 ist von w_1 aus betrachtet eine deontisch perfekte Welt, d.h. in w_2 sind alle Gebote, die in w_1 gelten, faktisch erfüllt

► R^d ist seriell: $\forall w_1 \exists w_2\ w_1R^dw_2$

$V(OBL\alpha, w) = 1$ gdw. für jede Welt w_j mit wR^dw_j gilt: $V(\alpha, w_j) = 1$
$V(PERM\alpha, w) = 1$ gdw. für mindestens eine Welt w_j mit wR^dw_j gilt: $V(\alpha, w_j) = 1$

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

Imperative als deontische Modalitäten

[Chung-hye Han 1997]

- Deontische Modalaussagen und Imperative werden gleichermaßen in Bezug auf eine **normative Basis** bewertet:
  - deontische Modaliäten: Gesetze, soziale Regeln, Pflichten, ...
  - Imperative: Kodex-Vorstellungen der Sprecher

- illokutive Funktionen von Imperativen:
  - Befehl *Räum dein Zimmer auf.*
  - Vorschlag, Rat *Nimm am besten die Linie 41.* *Ruh dich doch mal aus.*
  - Erlaubnis *Komm rein.*
  - Drohung *Komm mir nicht zu nahe.*
  - Wunsch *Werde bald wieder gesund.*
  - Instruktion *Schütteln Sie die Flasche vor dem ersten Gebrauch.*
  - Warnung *Sei leise.* *Pass auf.*

Imperative als deontische Modalitäten

[vgl. Chung-hye Han 1997]

- die semantische Funktionen von Imperativen IMP α:
  - Sprecher s etabliert gegenüber Adressat a eine für diesen gültige Verpflichtung oder Erlaubnis:
    - "IMP α", geäußert von Sprecher s in Welt w gegenüber Adressat a, bedeutet, dass nach der Vorstellung von s der Adressat a in w die Verflichtung oder Erlaubnis hat, die durch α beschriebene Handlung auszuführen oder das beschriebene Ereignis herbeizuführen.
      - OBL(a_räumt_sein_Zimmer_auf)
      - PERM(a_betritt_Zimmer_von_s)
    - Zur Bewertung von OBL β bzw. PERM β werden diejenigen Welten hinzugezogen, die aus Sicht des Sprechers deontisch perfekt in Bezug auf seine jeweils gültigen Kodexvorstellungen sind.

Imperative als deontische Modalitäten

[vgl. Chung-hye Han 1997]

- die semantische Funktionen von Imperativen IMP α:
  - Imperative haben selbst keinen Wahrheitswert, sondern legen die Bedingungen fest, unter denen die deontischen Erwartungen des Sprechers erfüllt sind:
    - *Räum dein Zimmer auf.* ► *Wenn du dein Zimmer aufräumst, dann bin ich zufrieden.*
      - Wenn Adressat a die geforderte Handlung ausführt, dann sind die deontischen Erwartungen des Sprechers erfüllt.
      - Die Erwartungen des Sprechers s an den Adressaten a sind in w erfüllt, wenn a in allen (für OBL) bzw. in einer (für PERM) Welt wj mit $wR^d w_j$ die geforderte Handlung ausführt. R^d ist dabei die aktuell für den Sprecher gültige deontische Strukturierung seines normativen Redehintergrunds(*) [d.h. R^d legt fest, welche möglichen Welten der Sprecher aktuell für die deontisch idealen Umstände hält].

        (*) nach A. Kratzer (1991 u.a.)

Irreale / Kontrafaktische Konditionale [D. Lewis, A. Kratzer]]

- Konditionale mit (in w) explizit falschem Antezedens:
  - *Wenn der Schiedsrichter nicht Elfmeter gepfiffen hätte, hätten die Bayern gewonnen.*
  - *Wenn Kahn verletzt wäre, müsste Hildebrandt ins Tor.*
  - *Wenn Ballack zu ManU wechseln würde, könnte Deisler seine Rolle übernehmen.*
- Die Auswertung des Konsequens q in einem kontrafaktischen Konditional p ♏ q bzgl. einer Welt w erfolgt relativ zu Welten, die w so weit ähnlich sind, dass sie nur solche minimale Veränderungen gegenüber w aufweisen, die p wahr machen.
- Die Menge der einander zugänglichen Welten B wird zusätzlich durch eine Ordnungsrelation O der relativen Ähnlichkeit strukturiert.
  - O ist eine (schwache) **partielle Ordnung**, d.h. es gelten:
    - [Transitivität] $\forall w_1 w_2 w_3 \in B\ (w_1 O w_2 \wedge w_2 O w_3 \rightarrow w_1 O w_3)$
    - [Reflexivität] $\forall w \in B\ (wOw)$
    - [Antisymmetrie] $\forall w_1 w_2 \in B\ (w_1 O w_2 \wedge w_2 O w_1 \rightarrow w_1 = w_2)$

Irreale / Kontrafaktische Konditionale
[D. Lewis, A. Kratzer]]

- Wahrheitsbedingungen für kontrafaktische Konditionale:

  – für *hätte*-, *müsste*-, *würde*-Konditionale

    $V(p \;\Box\!\!\Rightarrow q, w) = 1$ gdw. $V(q, w') = 1$ in jeder Welt w' mit wOw', in der $V(p, w') = 1$.

  – für k*önnte*-Konditionale

    $V(p \;\Diamond\!\!\Rightarrow q, w) = 1$ gdw. $V(q, w') = 1$ in einer Welt w' mit wOw', in der $V(p, w') = 1$.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

verallgemeinerte Modalanalyse: Redehintergrund und Ordnungsquelle
[A.Kratzer]

- Modalverben haben eine ganze Bandbreite von Lesarten:

  – *Der Dozent muss bald aufhören.*

    - zirkumstantiell: ... denn die Fakten zwingen ihn dazu (z.B. Haus wird gleich abgeschlossen)
    - epistemisch: ... denn nach allem, was ich weiß, kann es nicht mehr lange dauern.
    - deontisch: ... denn nach allem, was es an Regeln und Pflichten gibt, darf es nicht mehr lange dauern.
    - volitiv/buletisch: ... denn ich wünsche mir, dass es nicht mehr so lange dauert
    - stereotyp: ... denn üblicherweise ist um diese Zeit bald Schluss.

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg

verallgemeinerte Modalanalyse: Redehintergrund und Ordnungsquelle [A.Kratzer]

- Verallgemeinertes Modell für Modalitäten:
  - Eine Funktion f bildet jede Welt w auf die Menge der von w aus zugänglichen Welten ab, die sog. modale Basis: f(w) = {w': wRw'}
  - Die modale Basis f(w) bildet den kontextuellen Redehintergrund für die Interpretation beliebiger Modalitäten.
  - Die Zugänglichkeitsrelation R kann verschieden gedeutet werden:
    - zirkumstantiell: Relevante Wahrheiten aus w sind in der gesamten modalen Basis f(w) wahr
    - epistemisch: Was man in w weiß, ist in der gesamten modalen Basis f(w) wahr
  - Die modale Basis / der Redehintergrund f(w) ist durch eine partielle Ordnungsrelation O der relativen Nähe oder Ähnlichkeit, die sog. Ordnungsquelle, strukturiert.
  - Die Ordnungsquelle O kann unterschiedlich begründet sein: Eine Welt w' ist desto näher zu einer Welt w, je ...
    - deontisch: ... mehr Gesetze aus w in w' beachtet werden;
    - volitisch/buletisch: ... mehr Wünsche aus w in w' erfüllt sind;
    - stereotyp: ... mehr w' dem normalen Gang der Dinge folgt.

verallgemeinerte Modalanalyse: Redehintergrund und Ordnungsquelle [A.Kratzer]

kontextuelle Interpretation intensionaler Ausdrücke bzgl. einer Welt w:

- muss p - p folgt aus dem Redehintergrund
- kann p - p ist vereinbar mit dem Redehintergrund
- wenn p dann q - q ist wahr in allen Welten w', die aus dem Teil des Redehintergrunds stammen, in dem p wahr ist, und die w gemäß O am nächsten sind.
  - indikative Konditionale: der Redehintergrund ist i.d.R. zirkumstantiell oder epistemisch und die Ordnungsquelle stereotyp bestimmt

❖ *Wenn wir in Zukunft nach 40 Minuten immer eine kurze Pause einlegen, dann bleiben alle Teilnehmer bis zum Schluss fit.*

verallgemeinerte Modalanalyse: Redehintergrund und Ordnungsquelle [A.Kratzer]

kontextuelle Interpretation intensionaler Ausdrücke bzgl. einer Welt w:

- muss p - p folgt aus dem Redehintergrund
- kann p - p ist vereinbar mit dem Redehintergrund
- wenn p dann q - q ist wahr in allen Welten w', die aus dem Teil des Redehintergrunds stammen, in dem p wahr ist, und die w gemäß O am nächsten sind.
  - kontrafaktische Konditionale: der Redehintergrund ist unspezifisch und die Ordnungsquelle ist total realistisch (enthält nur Welten, die sich von der Welt, in der p wahr ist, allenfalls minimal [= unwesentlich] unterscheiden)
    - ❋ p kann einen beliebigen Inhalt haben, der lediglich mit den logischen Gesetzen vereinbar sein muss; q wird dann so nah wie möglich an den realen Umständen bewertet

❖ *Wenn der Schiedsrichter nicht kurz vor Schluss diesen blöden Elfmeter gepfiffen hätte, hätten die Bayern gewonnen.*

verallgemeinerte Modalanalyse: Redehintergrund und Ordnungsquelle [A.Kratzer]

kontextuelle Interpretation intensionaler Ausdrücke bzgl. einer Welt w:

- muss p - p folgt aus dem Redehintergrund
- kann p - p ist vereinbar mit dem Redehintergrund
- wenn p dann q - q ist wahr in allen Welten w', die aus dem Teil des Redehintergrunds stammen, in dem p wahr ist, und die w gemäß O am nächsten sind.
  - indikative Konditionale: der Redehintergrund ist i.d.R. zirkumstantiell oder epistemisch und die Ordnungsquelle stereotyp bestimmt
  - kontrafaktische Konditionale: der Redehintergrund ist unspezifisch und die Ordnungsquelle ist total realistisch (enthält nur Welten, ie sich von der Welt, in der p wahr ist, allenfalls minimal [= unwesentlich] unterscheiden)
    - ► p kann einen beliebigen Inhalt haben, der lediglich mit den logischen Gesetzen vereinbar sein muss; q wird dann so nah wie möglich an den realen Umständen bewertet
  - logisches materiales Konditional: der Redehintergrund ist total realistisch (auf Welten beschränkt, die sich von w allenfalls minimal (= unwesentlich) unterscheiden) und die Ordnungsrelation ist unbeschränkt

Epistemisch-doxastische Logik

- propositionale Einstellungen (propositional attitudes)
  - *wissen, glauben, meinen, ..., überzeugt sein, für möglich halten, ...*
- Einstellungskontexte sind "hyperintensional", da sie weder die uneingeschränkte Ersetzung extensionsgleicher noch die intensionsgleicher Ausdrücke zulassen:
  - *Peter weiß, dass 2 + 2 = 4.*
    4 = √16
    ×⇒× *Peter weiß, dass 2 + 2 = √16*
- semantische Explikation durch Mögliche-Welten-Semantik und Wahrscheinlichkeitstheorie (W. Lenzen)
- generelles Format: PA (a, p)

	PA	(a,	p)
generelles Format:	*Einstellung*	*epistemisches Subjekt*	*Proposition (Einstellungsobjekt)*

Systeme der Epistemisch-doxastischen Logik (W. Lenzen)

System	**propositionale Einstellung**	**intendierte Bedeutung**	**probabilistische Deutung**	**MWS-Deutung**	**Deutung der Zugänglichkeitsrelation**
Strong Belief	CON(a, p)	*a ist überzeugt, dass p*	Prob(a, p) = 1	V(w, CON(a, p) = 1 gdw. ∀w'(wR^{e}w' → V(w',p) =1	a hält w' in w für möglich
Strong Belief	POS(a, p)	*a hält es für möglich, dass p*	Prob(a, p) > 0	V(w, POS(a, p) = 1 gdw. ∃w'(wR^{e}w' ∧ V(w',p) =1	a hält w' in w für möglich
Weak Belief	BEL(a, p)	*a glaubt, dass p (≈ a hält p für wahrscheinlicher als ¬p)*	Prob(a, p) > 0.5	? nicht-klassischer Quantor über Welten [MOST] ?	a hält w' in w für möglich
Knowledge as Strong Belief	K*(a, p)	*a weiß, dass p (≈ a ist überzeugt, dass p, und es ist der Fall, dass p)*	Prob(a, p) = 1 und es ist der Fall, dass p	V(w, C(a, p) = 1 gdw. ∀w'(wR^{e}w' → V(w',p) =1, wobei R^e reflexiv ist	a hält w' in w für möglich
Rational Knowledge	K(a, p)	*a weiß, dass p*	--	V(w, C(a, p) = 1 gdw. ∀w'(wR^{e}w' → V(w',p) =1, wobei R^e refl. + trans. ist	W' ist kompatibel mit allem, was a in w weiß

quantifikationelle Analyse von Modaloperatoren

	Universal (∀)	Partikular (∃)
alethisch	N	M
deontisch	OBL	PERM
kontrafaktisch	$\Box\!\!\Rightarrow$	$\Diamond\!\!\Rightarrow$
epistemisch	CON	POS
temporal	G, H	P, F

Das generelle Konstruktionsprinzip intensionaler Logiksysteme

- Basis: Lexikon, Syntax und Semantik der extensionalen AL/PL
- Erweiterung von Lexikon und Syntax extensionaler Systeme:
  - Intensionale Operatoren
  - Schlussregeln/Axiome für intensionale Operatoren
- Erweiterung der modelltheoretischen Semantik:
  - extensionale Modelle M_{ext} = <D, V> werden erweitert zu
  - intensionalen Modellen M_{int} = <D, Ω, P, V>, wobei
    - D : Domäne
    - Ω : Menge von Objekten ≠ D
      - je nach Logiksystem:
        - » W : Menge möglicher Welten
        - » T : Menge von Zeiten (Zeitpunkte, Perioden)
        - » E : Menge von Ereignissen
        - » Δ : Menge von doxastischen oder epistemischen Zuständen
        - » ...
    - P : Relation über Objekten aus Ω
      - je nach Logiksystem: Erreichbarkeit, Präzedenz. Teil-von, epistemische Zugänglichkeit, ...
    - V : Wertzuweisungsfunktion / Interpretationsfunktion

Dr. Michael Herweg, Einführung in die Logik, Univ. Heidelberg